<u>Μεθοδολογία Αναλυτικές Συναρτήσεις και Γεωμετρική Σειρά</u>

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Όταν επιθυμούμε να αναπτύξουμε τη συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z_0 - z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ σε δυναμοσειρά:

(i) γύρω από το σημείο $\alpha = 0$, τότε πράττουμε ως εξής:

$$\frac{1}{z_0 - z} = \frac{1}{z_0\left(1 - \dfrac{z}{z_0}\right)} = \frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{{z_0}^{n+1}}z^n,$$

για $\left|\dfrac{z}{z_0}\right| < 1$, ή ισοδύναμα για $|z| < |z_0|$, δηλαδή για όλα τα $z \in \mathbb{C}$ τα οποία κείτονται στον ανοιχτό δίσκο $D(0, |z_0|)$.

(ii) γύρω από τυχαίο σημείο $\alpha \neq 0$, τότε πράττουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_0 - z} &= \frac{1}{z_0 - \alpha + \alpha - z} = \frac{1}{(z_0 - \alpha)\left(1 - \dfrac{z - \alpha}{z_0 - \alpha}\right)} \\ &= \frac{1}{z_0 - \alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - \alpha}{z_0 - \alpha}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z_0 - \alpha)^{n+1}}(z - \alpha)^n,\end{aligned}$$

για $\left|\dfrac{z - \alpha}{z_0 - \alpha}\right| < 1$, ή ισοδύναμα για $|z - \alpha| < |z_0 - \alpha|$, δηλαδή για όλα τα $z \in \mathbb{C}$ τα οποία κείτονται στον ανοιχτό δίσκο $D(\alpha, |z_0 - \alpha|)$.

Παράδειγμα 0.1. *Οι συναρτήσεις $f(z) = \dfrac{1}{z + i}$ και $g(z) = \dfrac{1}{z - i}$ έχουν τα παρακάτω αναπτύγματα:*

$$f(z) = \frac{1}{i(1 - iz)} = -i\frac{1}{1 - iz} = (-i)\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n,\ |z| < 1$$

και

$$g(z) = \frac{1}{-i(1 + iz)} = i\frac{1}{1 - (-iz)} = i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n z^n,\ |z| < 1$$

γύρω από το σημείο $\alpha = 0$. Συνεπώς, η συνάρτηση

$$h(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i}\right)$$

αναλύεται σε δυναμοσειρά γύρω από το $\alpha = 0$ ως εξής:

$$h(z) = \frac{1}{2i}\left(i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n z^n + i\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} i^n(1 + (-1)^n)z^n,\ |z| < 1.$$

Άσκηση 0.2. *Να αναπτύξετε τις παραπάνω f, g ως δυναμοσειρές γύρω από τα σημεία $\alpha_1 = i$ και $\alpha_2 = -i$, αντίστοιχα.*

Όταν επιθυμούμε να αναπτύξουμε τη συνάρτηση $g(z) = \dfrac{1}{(z_0 - z)^{m+1}}, z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}, m \in \mathbb{N}$ σε δυναμοσειρά γύρω από ένα σημείο $a \neq z_0$, τότε

(1) Γράφουμε την $f(z) = \dfrac{1}{z_0 - z}, z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ως δυναμοσειρά γύρω από το σημείο a, δηλαδή,

$$f(z) = \frac{1}{z_0 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z_0 - \alpha)^{n+1}} (z - \alpha)^n, z \in D(\alpha, |z_0 - \alpha|).$$

(2) Παρατηρούμε ότι $f^{(m)}(z) = \dfrac{m!}{(z_0 - z)^{m+1}} = m! g(z)$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

(3) Από το θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειράς η f είναι άπειρες φορές ολόμορφη στο δίσκο $D(\alpha, |z_0 - \alpha|)$ με την m τάξης παράγωγο να δίνεται από τον τύπο

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{(z-a)^{n-m}}{(z_0 - a)^{n+1}}.$$

(4) Από τα βήματα (2) και (3) συνάγουμε ότι:

$$m! g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{(z-a)^{n-m}}{(z_0 - a)^{n+1}}, \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \frac{(z-a)^{n-m}}{(z_0 - a)^{n+1}}, \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}$$

Παράδειγμα 0.3. *Θα βρούμε το ανάπτυγμα της συνάρτησης* $\phi(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ *γύρω από το σημείο* $a = 0$*. Από το προηγούμενο παράδειγμα η* $f(z) = \dfrac{1}{z+i}$ *έχει γύρω από το* $a = 0$ *ανάπτυγμα:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -i^{n+1} z^n,\ |z| < 1.$$

Τώρα η f *είναι ολόμορφη με παράγωγο:*

$$f'(z) = \frac{-2}{(z+i)^2} = -2\phi(z),\ z \in D(0,1).$$

Από την άλλη μεριά η παράγωγος της f *(ως δυναμοσειρά) είναι :*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} -n i^{n+1} z^{n-1},\ z \in D(0,1).$$

Συνεπώς, προκύπτει

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n i^{n+1}}{2} z^{n-1},\ z \in D(0,1).$$

Άσκηση 0.4. *Να αναπτύξετε την παραπάνω συνάρτηση* ϕ *όπως επίσης και την* ϕ^2 *σε δυναμοσειρές γύρω από το σημείο* $\alpha_1 = i$*.*